pembahasan soal latihan uji konvergen matematika ii 24/25

edisi sesatmaxxing vol. 2

the one and only @kafeyangasli

April 24, 2025

1.

$$\int_0^\infty e^x \, dx$$

Pembahasan:

Misalkan bagian yang tak hingga menjadi suatu variabel:

$$= \lim_{a\to\infty} \int_0^a e^x \, dx$$

Integralkan seperti biasa:

$$\begin{aligned} &= \lim_{a\to\infty} [e^x]_0^a \\ &= \lim_{a\to\infty} e^a - e^0 \\ &= \lim_{a\to\infty} e^a - 1 \\ &= \infty - 1 \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa $\int_0^\infty e^x \, dx$ divergen karena memiliki nilai tak hingga.

2.

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^5} \, dx$$

Pembahasan:

Misalkan bagian yang tak hingga menjadi suatu variabel:

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_a^{-2} \frac{1}{x^5} \, dx$$

Integralkan seperti biasa:

$$\begin{aligned} &= \lim_{a\to-\infty} \int_a^{-2} x^{-5} \, dx \\ &= \lim_{a\to-\infty} \left[-\frac{1}{4} x^{-4} \right]_a^{-2} \\ &= \lim_{a\to-\infty} -\frac{1}{4}(-2)^{-4} + \frac{1}{4} a^{-4} \\ &= \lim_{a\to-\infty} -\frac{1}{64} + \frac{1}{4 \cdot a^4} \end{aligned}$$

Pisah menjadi dua:

$$\begin{aligned} &= \lim_{a\to-\infty} -\frac{1}{64} + \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{4 \cdot a^4} \\ &= -\frac{1}{64} + 0 \\ &= -\frac{1}{64} \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa $\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^5} \, dx$ konvergen karena memiliki nilai yang terdefinisi, yaitu $-\frac{1}{64}$.

3.

$$\int_4^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$$

Pembahasan:

Misalkan bagian yang tak hingga menjadi suatu variabel:

$$= \lim_{a\to\infty} \int_4^a xe^{-x^2}\,dx$$

Untuk menyelesaikan tipe integral ini, kita membutuhkan metode substitusi.

$$u = -x^2 \to du = -2x\,dx \to \frac{du}{-2x} = dx$$

Dan karena integral tentu, kita harus mengubah interval integralnya juga.

- $x = 4 \to u = -(4)^2 = -16$
- $x = a \to u = -a^2$

Masukkan u dan batas-batasnya:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{a\to\infty} \int_{-16}^{-a^2} \cancel{x} e^u \frac{du}{-2\cancel{x}} \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \lim_{a\to\infty} \int_{-16}^{-a^2} e^u\,du \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \lim_{a\to\infty} \left[e^u\right]_{-16}^{-a^2} \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \lim_{a\to\infty} e^{-a^2} - e^{-16} \\
&= -\frac{1}{2} \left(0 - e^{-16}\right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(-e^{-16}\right) \\
&= \frac{1}{2e^{16}}
\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa $\int_4^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$ konvergen karena memiliki nilai yang terdefinisi, yaitu $\frac{1}{2e^{16}}$.

4.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$$

Pembahasan:

Misalkan bagian yang tak hingga menjadi suatu variabel:

$$= \lim_{a\to\infty} \int_2^a \frac{1}{x\ln x}\,dx$$

Untuk menyelesaikan tipe integral ini, kita membutuhkan metode substitusi.

$$u = \ln(x) \to du = \frac{1}{x}\,dx \to x \cdot du = dx$$

Dan karena integral tentu, kita harus mengubah interval integralnya juga.

- $x = 2 \to u = \ln(2)$
- $x = a \to u = \ln(a)$

Masukkan u dan batas-batasnya:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{a\to\infty} \int_{\ln(2)}^{\ln(a)} \frac{1}{\cancel{x} \cdot u} \cancel{x} \cdot du \\
&= \lim_{a\to\infty} \int_{\ln(2)}^{\ln(a)} \frac{1}{u}\,du \\
&= \lim_{a\to\infty} \left[\ln(x)\right]_{\ln(2)}^{\ln(a)} \\
&= \lim_{a\to\infty} \ln(\ln(2)) - \ln(\ln(a))
\end{aligned}$$

Pisah menjadi dua:

$$= \lim_{a\to\infty} \ln(\ln(2)) - \lim_{a\to\infty} \ln(\ln(a))$$
$$= \ln(\ln(2)) - \infty$$

Dapat dilihat bahwa $\int_2^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx$ divergen karena memiliki nilai yang tak hingga.

5. $$\int_2^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

Pembahasan:

Misalkan bagian yang tak hingga menjadi suatu variabel:

$$= \lim_{a\to\infty} \int_2^a \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

Untuk menyelesaikan tipe integral ini, kita membutuhkan metode substitusi.

$$u = 1+x^2 \to du = 2x\,dx \to \frac{du}{2x} = dx$$

Ubah batas integralnya:

- $x = 2 \to u = 5$
- $x = a \to u = a^2+1$

Masukkan u dan batas-batasnya:

$$= \lim_{a\to\infty} \int_5^{a^2+1} \frac{\cancel{x}}{u}\frac{du}{2\cancel{x}}$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{a\to\infty} \int_5^{a^2+1} \frac{1}{u}\,du$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{a\to\infty} [\ln(x)]_5^{a^2+1}$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{a\to\infty} \ln(a^2+1) - \ln(5)$$

Pisah menjadi dua:

$$= \frac{1}{2}\left[\lim_{a\to\infty} \ln(a^2+1) - \lim_{a\to\infty} \ln(5)\right]$$
$$= \frac{1}{2}[\infty - \ln(5)]$$

Dapat dilihat bahwa $\int_2^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx$ divergen karena memiliki nilai yang tak hingga.

6. $$\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$$

Pembahasan:

Pilih suatu bilangan real, misal saya akan memilih 0. Lalu, pisah integral menjadi dua, dari $-\infty$ sampai 0, dan 0 sampai ∞.

$$= \int_{-\infty}^0 \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\,dx + \int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$$

Misalkan bagian yang tak hingga menjadi suatu variabel:

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$$

Untuk menyelesaikan tipe integral ini, kita membutuhkan metode substitusi.

$$u = \sqrt{4+x^2} \to u^2 = 4+x^2 \to 2u\,du = 2x\,dx \to u\,du = x\,dx$$

Ubah batas integralnya:

- $x = a \to u = \sqrt{(4+a^2)}$
- $x = 0 \to u = 2$
- $x = b \to u = \sqrt{(4+b^2)}$

Masukkan u dan batas-batasnya:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{a\to-\infty} \int_{\sqrt{4+a^2}}^{2} \frac{\not{u}}{\not{u}}\, du + \lim_{b\to\infty} \int_{2}^{\sqrt{4+b^2}} \frac{\not{u}}{\not{u}}\, du \\
&= \lim_{a\to-\infty} \int_{\sqrt{4+a^2}}^{2} du + \lim_{b\to\infty} \int_{2}^{\sqrt{4+b^2}} du \\
&= \lim_{a\to-\infty} [u]_{\sqrt{4+a^2}}^{2} + \lim_{b\to\infty} [u]_{2}^{\sqrt{4+b^2}} \\
&= \lim_{a\to-\infty} \left(2 - \sqrt{4+a^2}\right) + \lim_{b\to\infty} \left(\sqrt{4+b^2} - 2\right)
\end{aligned}$$

Pisah menjadi dua untuk setiap limit:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{a\to-\infty} 2 + \lim_{a\to-\infty} \sqrt{4+a^2} + \lim_{b\to\infty} \sqrt{4+b^2} - \lim_{b\to\infty} 2 \\
&= 2 + \infty + \infty - 2 \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\, dx$ divergen karena memiliki nilai yang tak hingga.

7.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

Pembahasan:

Pertama-tama, kita cek di interval mana fungsi tersebut diskontinu.

- $x = 0 \to f(0) = \frac{1}{1} = 1$ (*kontinu*)
- $x = 1 \to f(1) = \frac{1}{0} = ?$ (*diskontinu*)

Ternyata, fungsinya diskontinu pada $x = 1$. Maka, kita akan misalkan $x = 1$ dari sisi kiri.

$$= \lim_{a\to1^-} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

Gunakan sifat: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin(x) + C$:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{a\to1^-} [\arcsin(x)]_0^a \\
&= \lim_{a\to1^-} arcsin(a) - \cancel{arcsin(0)} \text{ (karena } arcsin(0) = 0\text{)} \\
&= \lim_{a\to1^-} arcsin(a) \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ konvergen karena memiliki nilai yang terdefinisi, yaitu $\frac{\pi}{2}$.

8.

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x}\, dx$$

Pembahasan:

Cek interval yang diskontinu.

- $x = 0 \to f(0) = \frac{?}{0} = ?$ (*diskontinu*)
- $x = 1 \to f(1) = \frac{0}{1} = 0$ (*kontinu*)

Karena diskontinu pada $x = 0$, maka misalkan $x = 0$ dari sisi kanan.

$$= \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{\ln x}{x} \, dx$$

Gunakan metode substitusi:

$$u = \ln(x) \to du = \frac{1}{x} dx \to x \cdot du = dx$$

Ubah batas integralnya:

- $x = a \to u = \ln(a)$
- $x = 1 \to u = \ln(1) = 0$

Masukkan u dan batas-batasnya:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{a \to 0^+} \int_{\ln(a)}^0 \frac{u}{\cancel{x}} \cancel{x} \cdot du \\
&= \lim_{a \to 0^+} \int_{\ln(a)}^0 u \, du \\
&= \lim_{a \to 0^+} \left[\frac{u^2}{2} \right]_{\ln(a)}^0 \\
&= \lim_{a \to 0^+} -\frac{\ln^2(a)}{2} \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa $\int_0^1 \frac{\ln x}{x} \, dx$ divergen karena memiliki nilai yang tak hingga.

9. $$\int_0^1 \ln x \, dx$$

Pembahasan:

Cek interval yang diskontinu.

- $x = 0 \to f(0) = \ln(0) = ?$ (*diskontinu*)
- $x = 1 \to f(1) = \ln(1) = 0$ (*kontinu*)

Karena diskontinu pada $x = 0$, maka misalkan $x = 0$ dari sisi kanan.

$$= \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \ln(x) \, dx$$

Gunakan definisi umum integral $\int \ln(x) \, dx = x \cdot \ln(x) - x + C$:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{a \to 0^+} \left[x \cdot \ln(x) - x \right]_a^1 \\
&= \lim_{a \to 0^+} (1 \cdot \ln(1) - 1) - (a \cdot \ln(a) - a) \\
&= \lim_{a \to 0^+} -1 - (a \cdot \ln(a)) + a \\
&= -1 - (0 \cdot \infty) + 0 \\
&= -1
\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa $\int_0^1 \ln x \, dx$ konvergen karena memiliki nilai yang terdefinisi, yaitu -1.

10. $$\int_0^3 \frac{x}{9 - x^2} \, dx$$

Pembahasan:

Cek interval yang diskontinu.

- $x = 0 \to f(0) = \frac{0}{9} = 0$ (*kontinu*)

- $x = 3 \rightarrow f(3) = \frac{3}{0} = ?$ (*diskontinu*)

Karena diskontinu pada $x = 3$, maka misalkan $x = 3$ dari sisi kiri.

$$= \lim_{a \to 3^-} \int_0^a \frac{x}{9 - x^2}\, dx$$

Gunakan metode substitusi:

$$u = 9 - x^2 \rightarrow du = -2x\, dx \rightarrow -\frac{du}{2x} = dx$$

Ubah batasan integralnya:

- $x = 0 \rightarrow u = 9$
- $x = a \rightarrow u = 9 - a^2$

Masukkan u dan batas-batasnya:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{a \to 3^-} -\int_9^{9-a^2} \frac{\cancel{x}}{u} \frac{du}{2\cancel{x}} \\
&= \frac{1}{2} \left(\lim_{a \to 3^-} -\int_9^{9-a^2} \frac{1}{u}\, du \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\lim_{a \to 3^-} \left[-\ln(u) \right]_9^{9-a^2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\lim_{a \to 3^-} -\ln(9 - a^2) + \ln(9) \right)
\end{aligned}$$

Pisah menjadi dua:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(\lim_{a \to 3^-} -\ln(9 - a^2) + \lim_{a \to 3^-} \ln(9) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(-\infty + \ln(9) \right)
\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa $\int_0^3 \frac{x}{9-x^2}\, dx$ divergen karena memiliki nilai yang tak hingga.

11.

$$\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{9 - x}}\, dx$$

Pembahasan:

Cek interval yang diskontinu.

- $x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$ (*kontinu*)
- $x = 9 \rightarrow f(9) = \frac{1}{\sqrt{0}} = ?$ (*diskontinu*)

Karena diskontinu pada $x = 9$, maka misalkan $x = 9$ dari sisi kiri.

$$= \lim_{a \to 9^-} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{9 - x}}\, dx$$

Gunakan metode substitusi:

$$u = \sqrt{9 - x} \rightarrow u^2 = 9 - x \rightarrow -2u\, du = dx$$

Ubah batasan integralnya:

- $x = 0 \rightarrow u = 3$
- $x = a \rightarrow u = \sqrt{9 - a}$

Masukkan u dan batas-batasnya:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{a\to 9^-} \int_3^{\sqrt{9-a}} \frac{1}{\cancel{u}} - 2\cancel{u} \cdot du \\
&= \lim_{a\to 9^-} -2 \cdot \int_3^{\sqrt{9-a}} du \\
&= \lim_{a\to 9^-} -2 \cdot [u]_3^{\sqrt{9-a}} \\
&= \lim_{a\to 9^-} -2 \cdot \left(\sqrt{9-a} - 3\right) \\
&= \lim_{a\to 9^-} -2\sqrt{-18+2a} + 6 \\
&= \cancel{-2 \cdot \sqrt{-18+18} + 6} \\
&= 6
\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa $\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{9-x}}\,dx$ konvergen karena memiliki nilai yang terdefinisi, yaitu 6.

12.

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$$

Pembahasan:

Cek interval yang diskontinu.

- $x = 0 \to f(0) = \frac{0}{3} = 0$ (*kontinu*)
- $x = 3 \to f(3) = \frac{3}{0} = ?$ (*diskontinu*)

Karena diskontinu pada $x = 3$, maka misalkan $x = 3$ dari sisi kiri.

$$= \lim_{a\to 3^-} \int_0^a \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$$

Gunakan metode substitusi:

$$u = \sqrt{9-x^2} \to u^2 = 9-x^2 \to 2udu = -2xdx \to -udu = xdx$$

Ubah batasan integralnya:

- $x = 0 \to u = \sqrt{9} = 3$
- $x = a \to u = \sqrt{9-a^2}$

Masukkan u dan batas-batasnya:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{a\to 3^-} \int_3^{\sqrt{9-a^2}} \frac{-\cancel{u}}{\cancel{u}}\,du \\
&= \lim_{a\to 3^-} -1 \cdot \int_3^{\sqrt{9-a^2}} du \\
&= \lim_{a\to 3^-} -1 \cdot [u]_3^{\sqrt{9-a^2}} \\
&= \lim_{a\to 3^-} -1 \cdot \left(\sqrt{9-a^2} - 3\right) \\
&= \lim_{a\to 3^-} -\sqrt{9-a^2} + 3 \qquad = \cancel{-\sqrt{9-9}} + 3 = 3
\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$ konvergen karena memiliki nilai yang terdefinisi, yaitu 3.

13.

$$\int_0^2 \frac{1}{1-x^2}\,dx$$

Pembahasan:

Cek interval yang diskontinu.

- $x = 0 \rightarrow \frac{1}{1} = 1$ (*kontinu*)
- $x = 2 \rightarrow -\frac{1}{3}$ (*kontinu*)

Ternyata, keduanya sama-sama kontinu! Lantas, mana yang diskontinu?

Mari kita lihat penyebutnya: $\sqrt{1-x^2}$. Jika kita sama dengankan 0, yang dimana menghasilkan $\frac{1}{0}$ alias diskontinu, kita dapatkan:

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 0 \\ x^2 &= 1 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Terdapat dua x, yaitu $x = 1$ dan $x = -1$. Yang memenuhi interval $[0..2]$ yang kita miliki saat ini adalah $x = 1$.

Karena terdapat titik yang diskontinu di antara interval yang ada, maka kita pisah integralnya dari batas bawah ke titik diskontinu dan titik diskontinu ke batas atas integral, lalu memisalkannya.

$$= \lim_{a \to 1^-} \int_0^a \frac{1}{1-x^2}\,dx + \lim_{b \to 1^+} \int_b^2 \frac{1}{1-x^2}\,dx$$

Untuk tipe integral ini, kita bisa menggunakan integral pecah parsial, dimana:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}$$

Atau gunakan saja sifat integral umum:

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{\ln(x+1)}{2} + \frac{\ln(x-1)}{2} + C$$

Untuk penjabaran yang integral pecah parsial, silahkan dicoba sendiri! Hasilnya akan tetap sama.

Maka,

$$= \lim_{a \to 1^-} \left[\frac{\ln(x+1)}{2} + \frac{\ln(x-1)}{2} \right]_0^a + \lim_{b \to 1^+} \left[\frac{\ln(x+1)}{2} + \frac{\ln(x-1)}{2} \right]_b^2$$

Oke. Cukup sampai sini, kita bisa langsung menyimpulkan bahwa integral ini divergen. Mengapa? Karena terdapat $\ln(a-1)$, dimana jika limit kita substitusikan menjadi $\ln(0)$.

> *Ingat!*
> *Jika salah satu limitnya ada yang divergen, maka seluruh integralnya menjadi divergen.*

14.

$$\int_0^\infty \frac{1}{x(x-1)}\,dx$$

Pembahasan:

Misalkan bagian yang tak hingga menjadi suatu variabel:

$$= \lim_{a \to 1^-} \int_0^a \frac{1}{x(x-1)}\,dx + \lim_{b \to 1^+} \lim_{c \to \infty} \int_b^c \frac{1}{x(x-1)}\,dx$$

Gunakan metode integral pecah parsial untuk integral pertama:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x-1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \\ 1 &= \frac{A(x-1) + Bx}{x^2 - x} \\ 1 &= Ax - A + Bx \\ 1 &= (A+B)x + (-A) \end{aligned}$$

Koefisien x^1 bernilai 0 dan x^0 bernilai 1. Sehingga:

$$\begin{aligned} A + B &= 0 & -A &= 1 \\ A &= -B & A &= -1 \end{aligned}$$

Masukkan nilai A dan B:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{a\to 1^-}\int_0^a \frac{1}{x}\,dx + \lim_{a\to 1^-}\int_{-1}^{a-1}\frac{1}{u}\,dx \\
&= \lim_{a\to 1^-}\left[ln(x)\right]_0^a + \lim_{a\to 1^-}\left[ln(u)\right]_{-1}^{a-1} \\
&= \lim_{a\to 1^-}\ln(a)-\ln(0)+\lim_{a\to 1^-}\ln(a-1)-\ln(1) \\
&= \infty-\infty+\infty-0
\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa $\int_0^\infty \frac{1}{x(x-1)}\,dx$ divergen karena salah satu integralnya memiliki nilai tak hingga.

15.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4}{x^2+1}\,dx$$

Pembahasan:

Pilih suatu bilangan real, misal saya akan memilih 0. Lalu, pisah integral menjadi dua, dari $-\infty$ sampai 0, dan 0 sampai ∞.

$$= \int_{-\infty}^{0}\frac{4}{x^2+1}\,dx + \int_0^{\infty}\frac{4}{x^2+1}\,dx$$

Misalkan bagian yang tak hingga menjadi suatu variabel:

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{4}{x^2+1}\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{4}{x^2+1}\,dx$$

Gunakan sifat integral $\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x)+C$:

$$\begin{aligned}
&= 4\cdot\left(\lim_{a\to-\infty}\left[\arctan(x)\right]_a^0 + \lim_{b\to\infty}\left[\arctan(x)\right]_0^b\right) \\
&= 4\cdot\left(\lim_{a\to-\infty}\cancel{\arctan(0)} - \arctan(a) + \lim_{b\to\infty}\arctan(b) - \cancel{\arctan(0)}\right) \\
&= 4\cdot\left(\lim_{a\to-\infty} -\arctan(a) + \lim_{b\to\infty}\arctan(b)\right) \\
&= 4\cdot\left(-(-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= 4\pi
\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4}{x^2+1}\,dx$ konvergen karena memiliki nilai yang terdefinisi, yaitu 4π.