# sesatmaxxing

matematika ii

the one and only

kafeyangasli

30/5/25

# pembahasan UAS MTK II 24/25

edisi sesatmaxxing vol. 2

the one and only @kafeyangasli

June 14, 2025

## Soal A

1. Selesaikan persamaan diferensial berikut menggunakan pemisahan variabel:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x+y)^2}$$

dan transformasi $u = x + y$.

**Pembahasan:**

Untuk mendapatkan transformasi $\frac{dy}{dx}$ ke $\frac{du}{dx}$, kita bisa mengubah transformasi $u = x + y$ menjadi $y = u - x$. Sehingga, jika diturunkan terhadap $x$ akan menghasilkan $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$. Substitusikan:

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dx} - 1 &= \frac{1}{u^2} \\
\frac{du}{dx} &= \frac{1}{u^2} + 1 \\
\frac{du}{dx} &= \frac{u^2+1}{u^2} \\
\frac{u^2}{u^2+1}\,du &= dx
\end{aligned}$$

*Bravo!* Sekarang, integralkan:

$$\begin{aligned}
\int \frac{u^2}{u^2+1}\,du &= \int dx \\
\int 1\,du - \int \frac{1}{u^2+1}\,du &= \int dx \\
u - \tan^{-1}(u) - x &= C \\
(x+y) - \tan^{-1}(x+y) - x &= C \\
y - \tan^{-1}(x+y) &= C
\end{aligned}$$

2. Dengan menggunakan sifat konvolusi untuk invers transformasi Laplace, selesaikan:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s+2)(s-1)}\right)$$

**Pembahasan:**

Invers transformasi Laplace mengembalikan suatu transformasi Laplace ke fungsi sebelumnya.

Kita diberikan $L^{-1}\left(\frac{1}{(s+2)(s-1)}\right)$. Agar kita bisa mengubahnya ke fungsi awal, kita perlu menerapkan metode pecahan parsial. Maka:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(s+2)(s-1)} &= \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-1} \\
1 &= A(s-1) + B(s+2) \\
1 &= As - A + Bs + 2B \\
1 &= (A+B)s + (-A+2B) \\
&\text{koef}\,s^1: \quad A+B=0 \quad \Rightarrow \quad A=-B \quad \Rightarrow \quad A=-\tfrac{1}{3} \\
&\text{koef}\,s^0: \quad -A+2B=1 \quad \Rightarrow \quad B+2B=1 \quad \Rightarrow \quad 3B=1 \quad \Rightarrow \quad B=\tfrac{1}{3}
\end{aligned}$$

Sehingga, invers Laplace kita akan menjadi:

$$L^{-1}\left(-\frac{1}{3(s+2)}+\frac{1}{3(s-1)}\right)$$

Pecah Laplacenya:

$$L^{-1}\left(-\frac{1}{3(s+2)}\right)+L^{-1}\left(\frac{1}{3(s-1)}\right)$$

Anggap $-\frac{1}{3}=a$ dan $\frac{1}{3}=b$, maka berlaku:

$$-\frac{1}{3}\left(L^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right)\right)+\frac{1}{3}\left(L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)\right)$$

Gunakan sifat $L(e^{at})=\frac{1}{s-a}$:

$$-\frac{1}{3}\left(e^{-2t}\right)+\frac{1}{3}\left(e^{t}\right)$$

Sederhanakan:

$$\frac{-e^{-2t}+e^{t}}{3}$$

# Soal B

1. Tentukan nilai integral tak wajar berikut dengan menggunakan fungsi Gamma:

$$\int_0^\infty x^9 e^{-x^4}\,dx$$

**Pembahasan:**

Bentuk umum dari fungsi Gamma adalah:

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx$$

Sekilas persamaan yang diberikan sudah hampir mirip, namun terdapat $e^{-x^4}$! Untuk mengatasi ini, kita bisa menggunakan permisalan:

$$u=x^4 \quad du=4x^3\,dx \quad \frac{du}{3x^3}=dx$$

Substitusikan:

$$\begin{aligned}&=\int_0^\infty x^{\cancel{9}}e^{-u}\frac{du}{4\cancel{x^3}}\\&=\frac{1}{4}\cdot\int_0^\infty x^6e^{-u}\,du\end{aligned}$$

Selanjutnya, kita ubah $x^6$ menjadi dalam bentuk $u$.

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{4}\cdot\int_0^\infty x^4\cdot x^2e^{-u}\,du\\&=\frac{1}{4}\cdot\int_0^\infty x^4\cdot(x^4)^{\frac{1}{2}}e^{-u}\,du\\&=\frac{1}{4}\cdot\int_0^\infty u\cdot u^{\frac{1}{2}}e^{-u}\,du\\&=\frac{1}{4}\cdot\int_0^\infty u^{\frac{3}{2}}e^{-u}\,du\\&\textit{ubah eksponen u menjadi } n-1\\&=\frac{1}{4}\cdot\int_0^\infty u^{\frac{5}{2}-1}e^{-u}\,du\end{aligned}$$

*Bravo!* Sekarang, ubah fungsi menjadi Fungsi Gamma.

$$=\frac{1}{4}\cdot\Gamma(\frac{5}{2})$$

Selesaikan menggunakan sifat $\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n)$ dan $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \cdot \left( \Gamma(\frac{3}{2}+1) \right) \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{3}{2} \cdot \Gamma(\frac{3}{2}) \right) \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{3}{2} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}+1) \right) \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}) \right) \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} \right) \\
&= \frac{3}{16} \sqrt{\pi}
\end{aligned}
$$

2. Diberikan sebuah fungsi:

$$
f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}
$$

sedemikian hingga $f(x+2\pi) = f(x)$. Tentukan deret Fouriernya!

**Pembahasan:**

Definisi umum deret Fourier adalah:

$$
f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cdot \cos\left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( b_n \cdot \sin\left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right)
$$

dengan

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx \\
a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cdot \cos\left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx \\
b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cdot \sin\left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx
\end{aligned}
$$

Pertama-tama, kita cari periodenya. Karena fungsi merentang dari $-\pi$ sampai $\pi$, maka periodenya adalah $2\pi$, sehingga $L = \pi$. Lalu, sebagai langkah aman untuk mempercepat perhitungan, kita tentukan terlebih dahulu sifat fungsi tersebut; apakah fungsi ganjil atau genap?

Fungsi adalah fungsi genap bilamana $f(-x) = f(x)$, dan fungsi adalah fungsi ganjil bilamana $f(-x) = -f(x)$.

Misal kita ambil $x = -1$, maka $f(-1) = -1$. Dan jika $x = 1$, maka $f(1) = 1$. Bisa dilihat bahwa $f(-1) = -f(1)$. Maka, fungsi yang diberikan adalah **fungsi ganjil**.

- Mencari $a_0$:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \\
&\quad \textit{Karena fungsi merupakan fungsi ganjil, hasilnya integralnya pasti adalah 0.} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

- Mencari $a_n$:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\, dx \\
&\quad \textit{Karena perkalian dua fungsi tersebut merupakan fungsi ganjil,} \\
&\quad \textit{hasilnya integralnya pasti adalah 0.} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

- Mencari $b_n$:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin(nx)\,dx$$

*Karena perkalian dua fungsi tersebut merupakan fungsi genap, hasilnya integralnya pasti terdefinisi. Sehingga, kita harus menghitung integralnya. Dan karena terdefinisi di interval yang berbeda, pisah integralnya.*

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -\sin(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi}\sin(nx)\,dx\right)$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{0}^{\pi}\right)$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n} - \frac{\cos(-n\pi)}{n} - \frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{n}\right)$$

*Karena* $\cos(x)$ *adalah fungsi genap, maka* $\cos(-nx) = \cos(nx)$.

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\cos(n\pi)-\cos(n\pi)+1}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2-2\cos(n\pi)}{n}\right)$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-\cos(n\pi)}{n}\right)$$

Ingat dengan definisi $cos(n\pi) = (-1)^n$!

$$= \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$

Masukkan ke deret Fourier:

$$f(x) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(0\cdot\cos(nx)\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)\cdot\sin(nx)\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)\cdot\sin(nx)\right)$$

Sampai tahap ini, secara teori sudah 'benar', namun bisa disederhanakan lebih lanjut.

Perhatikan pada bagian $(1-(-1)^n)$. Bagian tersebut akan memiliki dua kemungkinan, yaitu:

$$\left(1-(-1)^n\right) = \begin{cases} 0, & n = genap \\ 2, & n = ganjil \end{cases}$$

Oleh karenanya, fungsi akan bernilai tidak 0 pada saat $n = ganjil$. Sehingga, kita bisa ubah bentuk fungsinya menjadi:

$$= \sum_{n=1,3,5,7,..}^{\infty}\left(\frac{2}{n\pi}\left(2\right)\cdot\sin(nx)\right)$$
$$= \sum_{n=1,3,5,7,..}^{\infty}\left(\frac{4}{n\pi}\cdot\sin(nx)\right)$$

Dan karena $\frac{4}{\pi}$ merupakan konstanta, maka:

$$= \frac{4}{\pi}\cdot\sum_{n=1,3,5,7,..}^{\infty}\left(\frac{\sin(nx)}{n}\right)$$

3. Diberikan persamaan diferensial biasa linier orde satu:

$$x^2\frac{dy}{dx} - y^2 - 2xy = 0$$

- Tentukan apakah fungsi $x^2$ dan $y^2 - 2xy$ merupakan fungsi homogen berderajat dua!
  **Pembahasan:**
  Sebuah fungsi disebut homogen berderajat-n bilamana:

$$f(kx) = k^n(f(x)) \text{ atau } f(kx,ky) = k^n(f(x,y))$$

  .
  - $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned} f(kx) &= (kx)^2 \\ &= k^2x^2 \\ &= k^2(f(x)) \end{aligned}$$

*Terbukti!*

  - $f(x,y) = y^2 - 2xy$

$$\begin{aligned} f(kx,ky) &= (ky)^2 - 2(kx)(ky) \\ &= k^2y^2 - 2k^2xy \\ &= k^2(y^2 - 2xy) \\ &= k^2(f(x,y)) \end{aligned}$$

*Terbukti!*

  Maka, bisa disimpulkan bahwa fungsi $x^2$ dan $y^2 - 2xy$ merupakan fungsi homogen berderajat dua.
- Tentukan solusi dari persamaan diferensial tersebut!
  **Pembahasan:**
  Pertama-tama, kalikan persamaan tersebut dengan $dx$:

$$\begin{aligned} x^2 \frac{dy}{\cancel{dx}}\cancel{dx} - (y^2 - 2xy)\,dx &= 0 \\ x^2\,dy - y^2\,dx - 2xy\,dx &= 0 \end{aligned}$$

  Karena kedua fungsi adalah homogen dengan derajat yang sama, maka kita bisa menggunakan transformasi:

$$y = ux \quad dy = x \cdot du + u \cdot dx$$

  Substitusikan:

$$\begin{aligned} x^2\,(x \cdot du + u \cdot dx) - u^2x^2\,dx - 2ux^2\,dx &= 0 \\ x^3\,du + ux^2\,dx - u^2x^2\,dx - 2ux^2\,dx &= 0 \\ x^3\,du - ux^2\,dx - u^2x^2\,dx &= 0 \\ \frac{1}{x^2}(x^3\,du - ux^2\,dx - u^2x^2\,dx) &= 0 \\ x\,du - u\,dx - u^2\,dx &= 0 \\ x\,du - (u + u^2)\,dx &= 0 \\ \frac{du}{u+u^2} - \frac{dx}{x} &= 0 \end{aligned}$$

*(pemisahan variabel)*

  *Bravo!* Sekarang, integralkan:

$$\int \frac{du}{u+u^2} - \int \frac{dx}{x} = 0$$

  Pertama-tama, kita selesaikan bagian $du$ terlebih dahulu menggunakan pecahan parsial:

$$\begin{aligned} \frac{1}{u(1+u)} &= \frac{A}{u} + \frac{B}{1+u} \\ 1 &= A(1+u) + B(u) \\ 1 &= A + Au + Bu \\ 1 &= A + (A+B)u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{koef}\,u^1: \quad A + B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -A \quad \Rightarrow \quad B = -1 \\ &\text{koef}\,u^0: \quad A = 1 \end{aligned}$$

Lalu, substitusikan ke dalam persamaan:

$$\int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right) du - \int \frac{1}{x}\, dx = 0$$
$$\int \frac{1}{u}\, du - \int \frac{1}{1+u}\, du - \int \frac{1}{x}\, dx = 0$$

Selesaikan:

$$\ln|u| - \ln|1+u| + \ln|x| = C$$

Kembalikan dalam bentuk $y = ux \Rightarrow u = \frac{y}{x}$:

$$\ln\left|\frac{y}{x}\right| - \ln\left|1+\frac{y}{x}\right| + \ln|x| = C$$
$$\ln|y| - \cancel{\ln|x|} - \ln\left|\frac{x+y}{x}\right| + \cancel{\ln|x|} = C$$
$$\ln|y| - \ln\left|\frac{x+y}{x}\right| = C$$
$$\ln\left|\frac{y}{\frac{x+y}{x}}\right| = C$$
$$e^{\ln\left|\frac{yx}{x+y}\right|} = e^C$$
$$\frac{yx}{x+y} = C$$