matematika ii - all in one

edisi sesatmaxxing vol. 2

the one and only @kafeyangasli

June 15, 2025

1 Integral Tak Wajar

Suatu integral disebut Integral Tak Wajar jika:

- memiliki batasan $\pm\infty$, misal:
$$\int_4^{\infty} \frac{x}{e^{-x^2}}\,dx$$
- batasan tak terdefinisi, misal:
$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$$
(fungsi tak terdefinisi pada $x = 0$)

Untuk menyelesaikan tipe integral ini, atur bagian yang tak wajar menjadi suatu variabel limit. Misal:

$$\int_0^{\infty} e^x\,dx \;\Rightarrow\; \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^x\,dx$$

Beberapa teknik permisalan yang bisa dilakukan:

- Jika $f(x)$ memiliki batasan $[n,\infty)$ $\Rightarrow$ $\lim_{a\to\infty}\int_n^a f(x)\,dx$
- Jika $f(x)$ memiliki batasan $(-\infty,n]$ $\Rightarrow$ $\lim_{b\to-\infty}\int_b^n f(x)\,dx$
- Jika $f(x)$ memiliki batasan $(-\infty,\infty)$ $\Rightarrow$ $\int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx,\ c\in\mathbb{R}$
(lalu gunakan dua sifat yang diatas)
- Jika $f(x)$ tak terdefinisi di titik a pada batasan $(a,b]$ $\Rightarrow$ $\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx$
- Jika $f(x)$ tak terdefinisi di titik b pada batasan $[a,b)$ $\Rightarrow$ $\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx$
- Jika $f(x)$ tak terdefinisi di titik c pada batasan $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
(lalu gunakan dua sifat yang diatas)

2 Fungsi Gamma dan Beta

Fungsi Gamma adalah ekstensi dari fungsi faktorial yang sebelumnya hanya terdefinisi untuk bilangan bulat non-negatif ke bilangan kompleks.

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1}\cdot e^{-x}\,dx$$

Beberapa sifat dari fungsi Gamma diantaranya:

- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(n) = (n-1)!$
- $\Gamma(n+1) = n\cdot\Gamma(n)$
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Sementara fungsi Beta adalah fungsi khusus yang memiliki keterkaitan dengan fungsi Gamma.

$$\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1} \cdot (1-x)^{n-1}\, dx$$

Beberapa sifat dari fungsi Beta diantaranya:

- $\beta(m,n) = \beta(n,m)$
- $\beta(m,n) = \dfrac{\Gamma(m) \cdot \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

Fungsi Beta juga memiliki bentuk lain, seperti:

Dengan substitusi $x = \sin^2(\theta)$, menghasilkan:

$$\beta(m,n) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)^{2m-1} \cdot \cos(\theta)^{2n-1}\, d\theta$$

Dengan substitusi $x = \frac{1}{1+s}$, menghasilkan:

$$\beta(m,n) = \int_0^{\infty} \frac{s^{m-1}}{(1+s)^{m+n}}\, ds = \int_0^{\infty} \frac{s^{n-1}}{(1+s)^{m+n}}\, ds$$

3 Deret Fourier

Deret Fourier mengubah fungsi periodik menjadi dalam bentuk jumlahan fungsi trigonometri. Bentuk dari deret Fourier sebuah fungsi $f(x)$ dengan periode $2L$ adalah sebagai berikut:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right)$$

dimana koefisen a dan b dicari dengan:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-L}^{L} f(x) \cdot \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-L}^{L} f(x) \cdot \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx \end{aligned}$$

4 Persamaan Diferensial Orde Satu

Bentuk umum persamaan diferensial orde satu adalah:

$$M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dx = 0$$

atau

$$N(x,y)\, \frac{dx}{dy} + M(x,y) = 0$$

Beberapa metode penyelesaian yang dapat dilakukan:

- Pemisahan Variabel

  Pemisahan Variabel mengubah bentuk:

  $$M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dx = 0$$

  menjadi:

  $$M(x)M(y)\, dx + N(x)N(y)\, dx = 0$$

  sehingga:

  $$G(x)\, dx + H(y)\, dy = 0$$

- Transformasi

  Metode transformasi hanya bisa dilakukan jika kedua $M(x,y)$ dan $N(x,y)$ merupakan fungsi homogen berderajat-n. Fungsi disebut homogen berderajat-n jika berlaku:

  $$F(kx,ky) = k^n \cdot F(x,y)$$

  Beberapa transformasi yang bisa dilakukan adalah $y = ux$ dan $u = ax + by$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$

- Solusi Eksak

  Solusi Eksak hanya bisa digunakan jika:

$$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}M(x,y)$$

Untuk kasus terapan dalam dunia nyata, misal yang biasa digunakan oleh Ibu Yeva untuk PDB Orde Satu adalah permasalahan konsentrasi garam, rumus umumnya adalah:

$$\frac{dx}{dt} = masuk - keluar$$

dimana:

- $x(t)$ adalah banyaknya garam dalam tangki
- *masuk* adalah jumlah garam yang masuk: $konsentrasi \times laju$
- *keluar* adalah jumlah garam yang keluar: $\dfrac{x(t)}{ukuran\ air}$
- $x(0)$ adalah banyaknya garam dalam tangki mula-mula

5 Persamaan Diferensial Orde Dua

Bentuk umum persamaan diferensial orde dua homogen adalah:

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x)$$

atau

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x)$$

Dengan mensubstitusi $y^{(n)} = r^n$ dengan n adalah turunan ke-n dari y dan jika $P(x)$, $Q(x)$, dan $R(x)$ adalah bilangan real tertentu a, b, dan c dengan $a \neq 0$ dan $G(x) = 0$, didapatkan persamaan karakteristik:

$$ar^2 + br + c = 0$$

yang bisa dicari untuk mencari solusi persamaan diferensial orde dua homogen. Menghitung diskriminan ($D = b^2 - 4ac$) dari persamaan karakteristik tersebut menghasilkan:

- Jika terdapat dua akar riil ($D > 0 \Rightarrow r_1, r_2$ dengan $r_1 \neq r_2$):

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$$

- Jika terdapat akar riil tunggal ($D = 0 \Rightarrow r = r_1 = r_2$):

$$y = C_1e^{rx} + C_2xe^{rx}$$

- Jika terdapat dua akar kompleks saling konjugat ($D < 0 \Rightarrow r_1, r_2 = \alpha \pm \beta i$ dengan $\beta \in \mathbb{R}$):

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x))$$

Beberapa kasus terapan dalam dunia nyata (berdasarkan PPT PDB Orde-2 Homogen milik Ibu Yeva):

1. Getaran Pegas

   Jika pegas direnggangkan sejauh x satuan dari panjang aslinya, maka pegas akan memberikan gaya yang sebanding dengan x:

$$F = -k \cdot x$$

   dengan k adalah konstanta pegas (positif).

   Menggunakan Hukum Newton II yang menyatakan $F = m \cdot a$ dimana a adalah percepatan sehingga $a = \dfrac{d^2x}{dt^2}$, didapatkan PDB orde 2 homogen:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \;\Rightarrow\; m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

Dengan sedikit aljabar, didapatkan akarnya adalah:

$$r_1, r_2 = \pm\omega i, \ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Persamaan di atas masih dalam kondisi dimana $\mu = 0$ atau tidak memfaktorkan gaya gesek ke dalam PDB. Jika kita memfaktorkan gaya geseknya, maka didapatkan gaya redamannya:

$$gaya\ redaman = -c\frac{dx}{dt}$$

sehingga:

$$\begin{aligned} F &= gaya\ pemulih + gaya\ redaman \\ m\frac{d^2x}{dt^2} &= -kx - c\frac{dx}{dt} \\ 0 &= m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx \end{aligned}$$

2. Rangkaian Listrik

   Rangkaian listrik RLC seri terdiri dari resistor R, induktor L, dan kapasitor C yang dihubungkan secara seri, dengan arus $I(t)$ sebagai fungsi waktu.

   Menurut hukum tegangan Kirchoff, jumlah penurunan tegangan harus sama dengan sumber tegangan (jika ada). Dengan $E(t)$ sebagai sumber tegangan, maka:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

   dimana:

   - $Q(t)$ adalah muatan (C atau Coulomb) pada kapasitor
   - $I(t) = \dfrac{dQ}{dt}$ adalah arus listrik
   - L adalah induktansi (H)
   - R adalah resistansi (Ω)
   - C adalah kapasitansi (F)

6 Transformasi Laplace

Misalkan $f(t)$ terdefinisi di $0 \leq t \leq \infty$ dan $s \in \mathbb{R}$, transformasi Laplace dari $f(t)$ dilambangkan dengan $L\{f(t)\}$ atau $F(s)$ adalah:

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t)\,dt$$

Beberapa sifat dari transformasi Laplace adalah:

- $L\{f+g\} = L\{f\} + L\{g\}$
- $L\{cf\} = c \cdot L\{f\}$ untuk c adalah sembarang konstan
- $L\{e^{at} \cdot f(t)\} = F(s-a)$
- $L\left\{f^{(n)}\right\} = s \cdot L\{f\} - f(0) - f'(0) \cdots - f^{(n-1)}(0)$

Menggunakan definisi transformasi Laplace di atas, bisa didapatkan tabel transformasi cepatnya:

$f(t)$	$L\{f(t)\}$	$L\{e^{at} \cdot f(t)\}$
1	$\dfrac{1}{s}$	$\dfrac{1}{s-a}$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\sin(bt)$	$\dfrac{b}{s^2+b^2}$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$
$\cos(bt)$	$\dfrac{s}{s^2+b^2}$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$

7 Invers Transformasi Laplace

Diberikan suatu fungsi $F(s)$, jika terdapat fungsi $f(t)$ yang kontinu pada interval $[0,\infty)$ dan memenuhi:

$$L\{f(t)\} = F(s)$$

Maka $f(t)$ merupakan transformasi Laplace invers dari $F(s)$ dimana:

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$