sesatmaxxing

statistika

the one and only

kafeyangasli

14/4/25

pembahasan UTS statistika 24/25

edisi sesatmaxxing vol. 1

the one and only @kafeyangasli

April 14, 2025

WARNING

Akan ada beberapa soal yang dilewati dikarenakan menurut saya kurang relevan dengan apa yang telah diajarkan oleh Ibu Yeva dan Ibu Etna. Diantaranya:

- *Soal A No. 1;*
- *Soal A No. 2; dan*
- *Soal B No. 1*

Serta mengingat timeframe yang tersedia dalam mengerjakan sesatmaxxing ini tidak banyak, mohon diskresi para pembaca untuk tidak memercayai jawaban yang ada. Pastikan untuk cek kembali bilamana terdapat kesalahan.

Soal A

3. Seratus dua puluh satu peserta dari dua ribu delapan puluh lima peserta SBMPTN diterima sebagai calon mahasiswa S1 Informatika. *Dari 50 peserta dipilih secara acak hitung peluang:*

a. Tepat 7 peserta diterima.
b. Maksimal 3 peserta diterima.
c. Minimal 2 peserta diterima.
d. Antara 4 sampai 9 peserta diterima.

Pembahasan:

Diketahui $N = 2085$ dan banyaknya yang diterima dari N tersebut adalah 121. Dari soal yang diberikan, sepertinya metode **Distribusi Hipergeometrik** cocok untuk digunakan, dimana rumus umum dari distribusi Hipergeometrik adalah:

$$P(X = x) = \frac{\binom{r}{x} \cdot \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Dimana r adalah banyaknya sukses dalam populasi, x adalah peluang yang akan dicari (berapa banyak calon yang diterima?), N adalah banyaknya populasi secara keseluruhan, dan n adalah banyaknya percobaan yang akan dilakukan.

Dari soal yang diberikan, maka dapat ditentukan variabel-variabelnya sebagai berikut:

$$r = 121, \quad N = 2085, \quad n = 50$$

dan x bergantung pada yang diminta soal.

Maka, didapatkan rumus Hipergeometrik yang akan digunakan untuk soal ini:

$$P(X = x) = \frac{\binom{121}{x} \cdot \binom{1964}{50-x}}{\binom{2085}{50}}$$

(a) $P(X = 7)$
Substitusi saja.

$$P(X = 7) = \frac{\binom{121}{7} \cdot \binom{1964}{43}}{\binom{2085}{50}}$$

(b) $P(X \leq 3)$

Karena diminta peluang didapatkan maksimal 3, maka ada beberapa kemungkinan: tidak ada calon mahasiswa yang terambil sama sekali $P(X=0)$, terambil 1 $P(X=1)$, terambil 2 $P(X=2)$, dan terambil 3 $P(X=3)$. Maka, peluangnya:

$$P(X \leq 3) = \frac{\binom{121}{0} \cdot \binom{1964}{50} + \binom{121}{1} \cdot \binom{1964}{49} + \binom{121}{2} \cdot \binom{1964}{48} + \binom{121}{3} \cdot \binom{1964}{47}}{\binom{2085}{50}}$$
$$= \frac{\binom{1964}{50} + 121 \cdot \binom{1964}{49} + \binom{121}{2} \cdot \binom{1964}{48} + \binom{121}{3} \cdot \binom{1964}{47}}{\binom{2085}{50}}$$

(c) $P(X \geq 2)$

Karena diminta peluang didapatkan minimal 2, maka ada beberapa kemungkinan: terambil 2 calon mahasiswa $P(X=0)$, terambil 3 $P(X=3)$, terambil 4 $P(X=4)$, dan seterusnya sampai terambil peluang terambil 50 $P(X=50)$.

Sah-sah saja jika kita menuliskan peluangnya seperti kita menuliskannya pada subnomor sebelumnya. Namun, untuk mempersingkat pengerjaan, ada cara yang lebih efisien. Yaitu dengan mengurangi 1 dengan peluang terambilnya maksimal 2 calon mahasiswa.

Mengapa begitu? Karena jika kita kurangi 1, yang dimana ia adalah jumlah keseluruhan peluang yang ada, dengan peluang terambilnya maksimal 2, maka hasil pengurangan inilah sisa peluangnya, yakni terambilnya calon mahasiswa sedikitnya 2 orang.

Maka, peluangnya:

$$P(X \geq 2) = 1 - \frac{\binom{121}{0} \cdot \binom{1964}{50} + \binom{121}{1} \cdot \binom{1964}{49} + \binom{121}{2} \cdot \binom{1964}{48}}{\binom{2085}{50}}$$
$$= 1 - \frac{\binom{1964}{50} + 121 \cdot \binom{1964}{49} + \binom{121}{2} \cdot \binom{1964}{48}}{\binom{2085}{50}}$$

(d) $P(4 \leq X \leq 9)$

Sama seperti subnomor b, ada beberapa kemungkinan: terambil 4 calon mahasiswa $P(X=4)$, terambil 5 $P(X=5)$, terambil 6 $P(X=6)$, terambil 7 $P(X=7)$, terambil 8 $P(X=8)$, dan terambil 9 $P(X=9)$.

Maka, peluangnya:

$$P(4 \leq X \leq 9) = \frac{\binom{121}{4} \cdot \binom{1964}{46} + \binom{121}{5} \cdot \binom{1964}{45} + \binom{121}{6} \cdot \binom{1964}{44} + \binom{121}{7} \cdot \binom{1964}{43}}{\binom{2085}{50}}$$
$$+ \frac{\binom{121}{8} \cdot \binom{1964}{42} + \binom{121}{9} \cdot \binom{1964}{41}}{\binom{2085}{50}}$$

4. Nilai Statistika mahasiswa S1 Informatika berdistribusi normal dengan rata-rata 72.25 dan standar deviasi 15.

a. Bila dipilih secara acak seorang mahasiswa hitung peluang mendapat nilai antara 75 sampai dengan 82.

b. Bila dipilih secara acak seorang mahasiswa hitung peluang mendapat nilai minimal 70.

c. Bila dipilih secara acak seorang mahasiswa hitung peluang mendapat nilai maksimal 85.

d. Lima belas persen nilai tertinggi mendapat nilai A, hitung batas terendah nilai A.

e. Tujuh persen nilai terendah mendapat nilai E, tentukan batas tertinggi nilai E.

f. Bila delapan persen mendapat nilai D dan tiga puluh persen mendapat nilai C, tentukan batas-batas nilai C.

Pembahasan:

Diketahui $\mu = 72.25$ dan $\sigma = 15$. Dari informasi yang diberikan, sepertinya **Distribusi Normal Baku** cocok untuk digunakan di soal ini.

Untuk mentransformasi peluang ke dalam distribusi normal baku, kita dapat menggunakan rumus:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Dimana nilai dari Z ini akan digunakan untuk menentukan peluang ke tabel distribusi normal baku yang sudah ada. Silahkan lihat lampiran yang berada di halaman terakhir.

a. $75 < X < 82$

Untuk $X = 75$:

$$Z = \frac{75 - 72.25}{15} = 0.183$$

Untuk $X = 82$:

$$Z = \frac{82 - 72.25}{15} = 0.65$$

Maka, peluangnya menjadi $P(0.183 < Z < 0.65)$, dimana:

$$P(0.183 < Z < 0.65) = P(Z < 0.65) - P(Z < 0.183)$$

Jika kita lihat dalam tabel pada lampiran, didapatkan $P(Z < 0.65) = 0.2422$ dan $P(Z < 0.183) = 0.0714$. Karena kita diminta mencari $P(Z < 0.183)$ sedangkan $Z < 0.183$ itu juga berada di bawah $Z < 0.65$, maka kita cukup mengurangi keduanya.

$$P(Z < 0.65) - P(Z < 0.183) = 0.2422 - 0.0714 = 0.1708$$

b. $X > 70$

Untuk $X = 70$:

$$Z = \frac{70 - 72.25}{15} = -0.15$$

Maka, peluangnya menjadi $P(-0.15 < Z < \infty)$.

Jika kita lihat dalam tabel pada lampiran, didapatkan $P(Z > -0.15) = 0.0596$. Karena yang ditanya adalah minimal 70, maka peluang 70 itu ditambah lebihnya, yaitu bagian distribusi yang positif. Maka, cukup ditambahkan 0.5 saja.

$$P(-0.15 < Z) + 0.5 = 0.0596 + 0.5 = 0.5596$$

c. $X < 85$

Untuk $X = 85$:

$$Z = \frac{85 - 72.25}{15} = 0.85$$

Maka, peluangnya menjadi $P(-\infty < Z < 0.85)$.

Jika kita lihat dalam tabel pada lampiran, didapatkan $P(Z < 0.85) = 0.3023$. Karena yang ditanya adalah maksimal 85, maka peluang 85 itu ditambah lebihnya, yaitu bagian distribusi yang negatif. Maka, cukup ditambahkan 0.5 saja.

$$P(-0.15 < Z < \infty) + 0.5 = 0.3023 + 0.5 = 0.8023$$

d. Lima belas persen nilai tertinggi mendapat nilai A, hitung batas terendah nilai A.

Karena kita ingin menghitung batas bawah yang mendapat nilai A, maka kita akan menghitung batas atas yang mendapatkan nilai dibawah A, yaitu $P(X < A) = 1 - P(X > A) = 1 - 0.15 = 0.85$.

Jika kita lihat dalam tabel pada lampiran, nilai Z yang sekiranya menghampiri nilai peluang $0.85/0.5 + 0.35$ adalah $Z = 1.04$.

Maka, tujuan kita adalah mencari nilai X yang menghasilkan nilai $Z = 1.04$.

$$\begin{aligned} Z &= \frac{X - \mu}{\sigma} \\ 1.04 &= \frac{X - 72.25}{15} \\ 15.6 &= X - 72.25 \\ 87.85 &= X \end{aligned}$$

e. Tujuh persen nilai terendah mendapat nilai E, tentukan batas tertinggi nilai E.

Kita akan menghitung batas atas yang mendapatkan nilai E, yaitu $P(X < E) = 0.07$.

Jika kita lihat dalam tabel pada lampiran, nilai Z yang sekiranya menghampiri nilai peluang 0.07 adalah $Z = -1.48$.

Maka, tujuan kita adalah mencari nilai X yang menghasilkan nilai $Z = -1.48$.

$$\begin{aligned} Z &= \frac{X-\mu}{\sigma} \\ -1.48 &= \frac{X-72.25}{15} \\ -22.2 &= X - 72.25 \\ 50.05 &= X \end{aligned}$$

f. Bila delapan persen mendapat nilai D dan tiga puluh persen mendapat nilai C, tentukan batas-batas nilai C.

Kita akan menghitung batas-batas yang mendapatkan nilai C dan D, yaitu $P(D < X < C) = 0.38$, dimana D ini adalah batas atas dari nilai D.

Karena sebanyak delapan persen mendapatkan nilai D, maka $P(X < D) = 0.08$, dimana nilai Z yang menghampiri peluang ini adalah $Z = -1.41$.

Maka, batas atas dari yang mendapatkan nilai D adalah:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{X-\mu}{\sigma} \\ -1.41 &= \frac{X-72.25}{15} \\ -21.15 &= X - 72.25 \\ 51.1 &= X \end{aligned}$$

Batas atas nilai D ini juga menjadi batas bawah nilai C.

Sekarang, kita mencari $P(X < C) = 0.38$, dimana nilai Z yang menghampiri adalah $Z = -0.3$.

Maka, batas atas dari yang mendapatkan nilai C adalah:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{X-\mu}{\sigma} \\ -0.3 &= \frac{X-72.25}{15} \\ -4.5 &= X - 72.25 \\ 67.75 &= X \end{aligned}$$

Sehingga, batas-batas nilai C adalah $51.1 < C < 67.75$.

Soal B

2. Misalkan dipunyai sebuah kotak yang terisi 200 kelereng, yang sebanyak 50 diantaranya rusak. Bila 5 kelereng itu diambil secara acak, berapa peluangnya kelimanya rusak dengan:

a. Pengambilannya tanpa pengembalian.

b. Pengambilannya dengan pengembalian.

Pembahasan:

Diketahui populasi kelereng $N = 200$, dengan kelereng yang rusak adalah $R = 50$.

a. Pengambilan 5 kelereng tanpa pengembalian, dan kelimanya rusak

Karena diambil tanpa pengembalian, maka metode yang cocok adalah **Distribusi Hipergeometrik**, karena peluang setiap pengambilan kelereng berbeda karena tidak dikembalikan.

Menggunakan rumus yang tersedia pada Soal A Nomor 3, maka didapatkan:

$$P(X=5) = \frac{\binom{50}{5} \cdot \binom{150}{0}}{\binom{200}{5}} = \frac{\binom{50}{5}}{\binom{200}{5}}$$

b. Pengambilannya dengan pengembalian. Karena diambil dengan pengembalian, maka metode yang cocok adalah **Distribusi Binomial**, karena peluang setiap pengambilan kelereng sama (antara rusak atau tidak, maka 0.25 dan 0.75). Menggunakan rumus Distribusi Binomial:

$$P(X=x) = \binom{N}{x} \cdot (p)^x \cdot (1-p^{N-x})$$

Maka didapatkan:

$$P(X=5) = \binom{5}{5} \cdot (0.25)^5 \cdot (0.75)^0 = (0.5)^5 = 0.00097$$

3. Suatu peubah acak X mempunyai sebaran peluang berdistribusi Binomial dengan $n=3$ dan peluang $1/4$ untuk $x = 0,1,2,3$.

A. Tentukan nilai tengahnya X!

B. Tentukan nilai rata-ratanya X!

Pembahasan:

Nilai Tengah atau Median dari peubah acak X didapatkan dengan mencari nilai x terkecil yang membuat peluang kumulatif $P(X<x) \geq 0.5$. Sedangkan untuk nilai rata-ratanya atau harga harapan dapat dicari dengan rumus $E(X) = \sum_x x \cdot P(x)$.

A. Nilai Tengah

Untuk $x \leq 0$, peluang kumulatifnya adalah 0.25, dimana $0.25 \not\geq 0.5$. Karena belum memenuhi, maka kita lanjut ke x selanjutnya.

Untuk $x \leq 1$, peluang kumulatifnya adalah 0.5, dimana $0.5 \geq 0.5$.

Maka, nilai tengahnya adalah 1.

B. Nilai Rata-Rata

Substitusi saja.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_x x \cdot P(x) \\ &= 0 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4}(0+1+2+3) \\ &= \frac{6}{4} = 1.5 \end{aligned}$$

4. Sebuah perusahaan alat listrik memproduksi bolam yang umurnya menyebar berdistribusi normal dengan nilai rata-rata 1000 jam dan standar deviasi 300 menit. Hitunglah peluang sebuah bohlam hasil produksinya akan mencapai umur antara 900 sampai 1100 jam!

Pembahasan:

Diketahui $\mu = 1000$ dan $\sigma = 5$.

Yang ingin dicari adalah $P(900 < X < 1100)$.

Untuk $X = 900$:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{900-1000}{5} \\ &= -20 \end{aligned}$$

Untuk $X = 1100$:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1100-1000}{5} \\ &= 20 \end{aligned}$$

Jika kita lihat dalam tabel pada lampiran, tidak terdapat $Z = -20$ dan $Z = 20$ yang definitif, karena meski ada, angkanya sangatlah kecil, mendekati 0 dan 1. Sehingga, kita asumsikan $P(Z < -20) = 0$ dan $P(Z < 20) = 1$.

Maka, peluangnya:

$$P(900 < X < 1100) = P(Z < 20) - P(Z < -20) = 1 - 0 = 1$$

Berarti, peluang sebuah bohlam akan mencapai umur 900 sampai 1100 tahun adalah 1 atau pasti terjadi. *(mencurigakan, *proceed with caution*.)

Standard Normal Distribution

Z-Score Table

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-1.4	0.08076	0.07927	0.07780	0.07636	0.07493	0.07353	0.07215	0.07078	0.06944	0.06811
-1.3	0.09680	0.09510	0.09342	0.09176	0.09012	0.08851	0.08691	0.08534	0.08379	0.08226
-1.2	0.11507	0.11314	0.11123	0.10935	0.10749	0.10565	0.10383	0.10202	0.10027	0.09853
-1.1	0.13567	0.13350	0.13136	0.12924	0.12714	0.12507	0.12302	0.12100	0.11900	0.11702
-1.0	0.15866	0.15625	0.15386	0.15151	0.14917	0.14686	0.14457	0.14231	0.14007	0.13786
-0.9	0.18406	0.18141	0.17879	0.17619	0.17361	0.17106	0.16853	0.16602	0.16354	0.16109
-0.8	0.21186	0.20897	0.20611	0.20327	0.20045	0.19766	0.19489	0.19215	0.18943	0.18673
-0.7	0.24196	0.23885	0.23576	0.23270	0.22965	0.22663	0.22362	0.22062	0.21770	0.21476
-0.6	0.27425	0.27093	0.26763	0.26435	0.26109	0.25785	0.25463	0.25143	0.24825	0.24510
-0.5	0.30854	0.30503	0.30153	0.29806	0.29460	0.29116	0.28774	0.28434	0.28096	0.27760
-0.4	0.34458	0.34090	0.33724	0.33360	0.32997	0.32636	0.32276	0.31918	0.31561	0.31207
-0.3	0.38209	0.37828	0.37448	0.37070	0.36693	0.36317	0.35942	0.35569	0.35197	0.34827
-0.2	0.42074	0.41683	0.41294	0.40905	0.40517	0.40129	0.39743	0.39358	0.38974	0.38591
-0.1	0.46017	0.45620	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	0.43644	0.43251	0.42858	0.42465
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189